§1 集合 总结

1. 运算定律

分配律 $B\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha}(B\cap A_\alpha)$

$B\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha}(B\cup A_\alpha)$

对偶律 $(\cap A_\alpha)^c=\cup(A_\alpha^c)$

2. 特征函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

$$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$$

$$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$$

3. 上、下限集

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x:\forall N\in\mathbb{N}^+,\exists n>N,x\in A_n\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{N=n}^{\infty}A_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x:\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall n>N,x\in A_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{N=n}^{\infty}A_n$$

4. σ代数

设 $\mathcal{A}\subseteq 2^X$，若 $A,B\in\mathcal{A}$，则 $A\cup B\in\mathcal{A}$，$A\setminus B\in\mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 为一个环.

若 $\mathcal{A}$ 满足：(1) $\phi\in\mathcal{A}$；(2) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$；(3) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{A}$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个σ代数.

$\mathbb{R}^n$ 中包含所有开集的σ代数称为Borel集.

例 由 $(0,2)$，$(1,3)$ 生成的σ代数：

ϕ，$\mathbb{R}$，$(0,2)$，$(1,3)$，$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$，$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

$(0,3)$，$(1,2)$，$(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$，$(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

5. 基数

(1) $A \sim B_0 \subseteq B \Longleftrightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$

(2) $B \sim A_0 \subseteq A \Longleftrightarrow \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$

(3) $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

(4) $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0, \overline{\overline{\mathbb{Z}}} = \aleph_0, \overline{\overline{\mathbb{Z}^n}} = \aleph_0, \overline{\overline{\mathbb{Q}^n}} = \aleph_0$

(5) $[0,1] \sim (0,1) \sim (0,1)^n \sim (0,1)^\infty$

$\overline{\overline{\{0,1\}^\infty}} \sim (0,1)$, $\mathbb{R}^\infty \sim \mathbb{R}$

Rem. (1) $\varphi^{-1}(\varphi(A_1)) \supseteq A_1$, $\varphi(\varphi^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

(2) $E[a \leq f < b] = E[f \geq a] \setminus E[f \geq b]$

6. Cantor 集